Лекция 2_Жалпы салыстырмалылық теориясындағы денелер механикасының бірінші жуықтауының метрикасы

Жалпы салыстырмалылық теориясындағы денелер механикасын түсіндіру барысын біз Эйнштейн теңдеулерінен бастаймыз [1].

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\chi T^{\mu\nu}, \ \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{1}$$

мұндағы Риччи тензоры

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

$\Gamma^{\mu,\alpha\beta}$ – Кристоффель символынан алынған шама

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right), \tag{3}$$

Индекстерді көтеруді қолданып:

$$\Gamma^{\mu,\alpha\beta} = g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}. \tag{4}$$

Осы орайда түсіндіре кетсек, индекстерді көтеру және төмендету – ЖСТ (GR) маңызды тұжырымдамасы, ол тензорларға қатысты және тензорлардың ковариантты және контрвариантты компоненттері арасында ауысуға мүмкіндік береді және теория бойынша ыңғайлырақ математикалық операциялар мен жеңілдетілген есептеулер үшін қолданылады. Индексті көтеру және төмендету қалай жұмыс істейтінін түсіну үшін біз ковариантты және контрвариантты тензорларды анықтаудан бастаймыз.

1. **Контравариантты тензорлар** - координат осьтерімен салыстырғанда индекстері қарама-қарсы бағытта бұрылатын тензорлар. Мысалы, төрт өлшемді кеңістік-уақытта контравариантты төрт вектордың құраушылары V^μ – индексі жоғарғыда болады.
2. **Ковариантты тензорлар** - индекстері координат осьтерімен бірдей бағытта болатын тензор. Сол төрт өлшемді кеңістік-уақытта төрт вектордың құраушылары V_μ төменгі индексі бар.

Көрсеткіштерді көтеру және төмендету тензорлардың осы екі түрі арасында ауысуға мүмкіндік береді. ЖСТда $g_{\mu\nu}$ кеңістік-уақыт метрикасын индекстерді көтеру және төмендету үшін қолданады. Индекстреді көтеру және төмендету келесідей:

1.Индексті көтеру: үстіңгі индексі бар T^{μ} контрварианттық тензорының қураушылары $g_{\mu\nu}$ метрика арқылы төмендетіледі

$$T_{\mu} = g_{\mu\nu}T^{\nu} \tag{5}$$

Мұнда ν – индексі метрика арқылы μ – жоғарғы индексімен түрленеді (сворачивается).

Индексті алып тастау: Төменгі индексті ковarianттық S_{μ} –тензорының құраушылары мына метрика арқылы көтеріледі:

$$S^{\mu} = g^{\mu\nu}S_{\nu} \tag{6}$$

Яғни, ν төменгі индексіне μ метрика арқылы «жығылады». Бұл тензорлардың контрвариантты және ковариантты құрамдас бөліктері арасында ауысуға және ыңғайлырақ белгілеумен математикалық операцияларды орындауға мүмкіндік береді.

Сонымен, (1) соңғы мүшесі екінші туындыларды қамтымайды, бірақ $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$, шамалардың біртекті квадраттық функциясын білдіреді. Демек, $g_{\mu\nu}$ негізгі тензордың бірінші туындыларды да қамтымайды деп айта аламыз. Ал екінші ретті туындылар бірінші мүшеге және сондай-ақ $\Gamma^{\mu\nu}$ шамасына да кіреді. Бірақ бұлар осы шамалардың бірінші туындылары арқылы ғана екінші туындыларды қамти алады:

$$\Gamma^{\nu} = g^{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

Кейбір Ψ функциядан д'Аламбер операторын келесідей формада жазуға болатынын ескерсек

$$\square\Psi = g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^{\nu}}, \tag{8}$$

Сондай-ақ

$$\square\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial x^{\alpha}}\right). \tag{9}$$

Осыдан

$$\Gamma^{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\right), \tag{10}$$

және

$$\Gamma^{\alpha} = -\Box x^{\alpha}. \tag{11}$$

Сонымен қатар, $\Gamma^{\mu\nu}$ шамалары ережеге сәйкес Γ^{ν} шамаларының контравариантты туындыларынан жартылай қосындысынан алынады:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\nabla^{\mu}\Gamma^{\nu} + \nabla^{\nu}\Gamma^{\mu}\right), \tag{12}$$

Нақтырақ көрсетсек:

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial\Gamma^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha} \right). \tag{13}$$

Әрине, Γ^{ν} вектор және $\Gamma^{\mu\nu}$ тензор емес екенін біле отырып бұл шамаларды Эйнштейн теңдеулерін қарапайым түрге келтіруге тиімді пайдалануға болады. Эйнштейннің теңдеулері әдетте ковариантты болып табылады, сондықтан төрт қалауымызша алынған функцияны қамтитын координаталық түрлендіруге мүмкіндік береді. Теңдеулер кейбір қалауымызша алынған координаттарда шешілсін дейік. Содан кейін тәуелсіз айнымалылар ретінде $\Box\Psi=0$ теңдеуінің төрт шешімін алып, басқа координаттарға көшуге болады. Бірақ x_0, x_1, x_2, x_3 координаттардың әрқайсысы $\Box x^{\alpha} = 0$ теңдеуін қанағаттандыратын болса, онда бұл координаталар жүйесінде мынадай болады:

$$\Gamma^{\nu} = 0, \tag{14}$$

осыдан

$$\Gamma^{\mu\nu} = 0. \tag{15}$$

Мұндай координаталар жүйесін *гармониялық* деп атаймыз. $\Gamma^{\nu} = 0$ шарттарды алғаш рет де-Дондер [2] және Ланчос [3] енгізгенімен, мұндай жүйе Фоктың гармоникалық координаталар жүйесі деген атаумен ғылыми әдебиетте кең тарады.

Бірінші жуықтау метрикасын алған кезде біз массалық таралудың аралдық сипаты туралы болжамнан шығамыз. Бұл болжам (Ньютон теориясындағыдай) белгілі бір шектеу шарттарын шексіздікте қоюға мүмкіндік береді, бұл есепті математикалық түрде нақты сипаттауға да болады.

Массалардың аралдық таралуы кезінде шексіздіктегі гравитациялық өріс нөлге ұмтылады. Сондықтан массалардан жеткілікті үлкен қашықтықта кеңістік-уақыт геометриясы жалған евклидтік болады деп болжауға тиіспіз. Бірақ геометрия псевдоевклидтік болса, x, y, z, t, Галилей координаттары бар интервалдың квадраты келесідей болады:

$$ds^{2} = c^{2}dt^{2} - \left(dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}\right). \tag{16}$$

Тәжірибе көрсеткендей, бүкіл кеңістікте геометрияның псевдоевклидтіктен аз айырмашылығы бар, аралық квадратының өрнегі бүкіл кеңістікте (16) аз ғана ерекшеленетін айнымалылар бар деп күту керек. Бұл «квази-галилейлік» координаттардың неғұрлым нақты математикалық анықтамасы Фоктың монографиясында берілген [1].

Ньютонның теориясы Галилей координатасында (инерциялық санақ жүйесі) қарапайым тұжырымдалғанын ұмытпауымыз керек. Сондықтан Эйнштейннің теориясын, яғни оның қасиеттері бойынша Галилей теориясына жалпылама жақын болатындай координаттарда жүргізу қажет. Ньютонның теориясы релятивистік емес. Бірақ релятивистік теориядан релятивистік емес теорияға өту үшін үлкен параметр ретінде *c* жарық жылдамдығын арнайы көрсету қажет. Сондықтан біз уақыт координатасы үшін өрнекке *c* шамасын енгізбейміз және мынадай белгілеулерді қоямыз:

$$x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z. \qquad (17)$$

Сонымен, x_0 айнымалысы t уақыттың мәніне тең болады. Ал, (16) өрнегінің интервалдың квадратына арналған түрі:

$$ds^2 = c^2 dx_0{}^2 - \left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right). \qquad (18)$$

Бұл өрнек геометрия псевдоевклидтік болатын массалардан жеткілікті үлкен қашықтықта орын алады.

Жалпы өрнекпен салыстыра отырып

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \qquad (19)$$

біз шексіздіктегі $g_{\mu\nu}$ -ның келесідей шекті мәндерін аламыз:

$$\left.\begin{array}{ll} (g_{00})_\infty = c^2, & (g_{0i})_\infty = 0 \\ (g_{ik})_\infty = -\delta_{ik}, & (i,k = 1,2,3). \end{array}\right\} \qquad (20)$$

Метрикалық тензордың контрвarianттық компоненттері үшін шекті мәндері:

$$\left(g^{00}\right)_\infty = \frac{1}{c^2}, \left(g^{0i}\right)_\infty = 0, \left(g^{ik}\right)_\infty = -\delta_{ik}. \qquad (21)$$

Бұл формулаларды метрикалық тензордың шекті шарттар ретінде қарастыруға болады. Алайда, бұл жазылған шектеу шарттары жеткіліксіз және олар массадан үлкен қашықтықтағы $g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu})_\infty$ айырманың асимптотикалық түрін сипаттайтын қосымша толықтырылулар керек.

$\Gamma^\nu = 0$ шарт бойынша Эйнштейн теңдеулері негізгі мүшелері д'Аламбер операторының пішініне ие болатын толқындық типті теңдеулерді білдіреді.

Массалардан тыс аймақта $T^{\mu\nu}$ тензоры нөлге тең, ал теңдеулер мынадай түрге келтіріледі

$$R^{\mu\nu} = 0, \tag{22}$$

мұнда $\Gamma^{\nu} = 0$ шартына сәйкес, $R^{\mu\nu}$ тензоры:

$$R^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Gamma^{\mu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}. \tag{23}$$

Үлкен қашықтықтағы $g^{\mu\nu} - \left(g^{\mu\nu}\right)_\infty$ айырмасы және олардың бірінші және екінші туындылары $\frac{1}{r}$ сияқты нөлге ұмтылады деп алайық, мұндағы $r = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}$. Сонда үлкен қашықтықта бірінші туындылардың біртекті квадраттық функциясын білдіретін (23) өрнектің екінші мүшесі ретінде $\frac{1}{r^2}$ сияқты нөлге ұмтылады. Даламбер операторына келетін болсақ, дәл осындай жуықтаумен ондағы коэффициенттерді олардың шекті мәндерімен ауыстыруға болады. Осы жеңілдетулерден кейін

$$R^{\mu\nu} \cong -\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_0{}^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_3{}^2}\right). \tag{24}$$

Эйнштейннің гравитация теориясын Ньютон теориясымен салыстыру үшін ең алдымен Эйнштейннің ауырлық күші теңдеулеріне кіретін χ тұрақтыны анықтау керек

$$R^{\mu\nu} = -\chi\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T\right), \tag{25}$$

мұндағы

$$R = \chi T. \tag{26}$$

Бұл тұрақтының мәнін Ньютон жуықтауындағы интервал квадратының өрнегін салыстыру арқылы табуға болады

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U\right)dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{27}$$

мұндағы

$$U = \gamma \int \frac{\rho'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} dx' dy' dz' \tag{28}$$

Эйнштейн теңдеулерін шамамен шешу арқылы алынған Ньютон потенциалының өрнегі.

(25) өрнегінің оң жағындағы массалық тензор үшін серпімді дене жағдайындағы евклид метрикасына сәйкес шамамен өрнектерді алуға болады.

$$\left.\begin{aligned} c^2T^{00} &= \rho + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\Pi\right), \\ c^2T^{0i} &= \rho v_i + \frac{1}{c^2}\left\{v_i\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\cdot\Pi\right) - P_{ik}v_k\right\}, \\ c^2T^{ik} &= \rho v_i v_k - P_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Мұнда ρ – массаның тығыздығы, v_i – жылдамдық құраушылары, Π – масса бірлігінің серпімділік энергиясы, P_{ik} –үш өлшемді кернеу тензоры.

Гравитациялық өріс болған кезде серпімді дененің массалық тензорының (29) өрнегі мына түрде болады:

$$\left.\begin{aligned} c^2T^{00} &= \rho\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\}, \\ c^2T^{0i} &= \rho v_i\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi - U\right)\right\} - \frac{1}{c^2}P_{ik}v_k, \\ c^2T^{ik} &= \rho v_i v_k - P_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Біздің жуықтауымызда бұл жерде тығыздық пен энергия ағынына (скаляр және Умов векторы) сәйкес келетін мүшелерді алып тастап, жай ғана жазуымызға болады

$$c^2T^{00} = \rho, \quad c^2T^{0i} = \rho v_i. \tag{31}$$

(31) өрнектер дұрыс болатындай дәлдікпен біз массалық тензордың инвариантын мынадай шамамен, яғни тығыздықпен алмастыра аламыз

$$T = \rho. \tag{32}$$

(31) және (32) формулалары (25) Эйнштейн теңдеулерінің оң жағындағы тензордың жуық мәнін есептеуге мүмкіндік береді. $g^{\mu\nu}$ өрнегінің Галилейлік мәндерін қолданып

$$\left.\begin{aligned} T^{00}-\frac{1}{2}g^{00}T&=\frac{1}{2c^2}\rho,\\ T^{oi}-\frac{1}{2}g^{0i}T&=\frac{1}{c^2}\rho v_i,\\ T^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}T&=\frac{1}{2}\rho\delta_{ik}.\end{aligned}\right\}\qquad(33)$$

Екінші жағынан, (24) өрнегіне сәйкес гармониялық координаталар жүйесінде шамамен мынадай өрнекті аламыз

$$R^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\Delta g^{\mu\nu}-\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial t^2},\qquad(34)$$

Мұндағы Δ – кәдімгі евклидтік Лаплас операторы.

Бізді квазистатикалық шешім қызықтыратындықтан, біз мұнда уақытқа қатысты екінші туындысы бар мүшелерді алып тастай аламыз. (33) және (34) өрнектерін (25) -ке қойсақ, біз мынаны аламыз:

$$\left.\begin{aligned} \Delta g^{00}&=-\frac{\chi}{c^2}\rho,\\ \Delta g^{0i}&=-\frac{2\chi}{c^2}\rho v_i,\\ \Delta g^{ik}&=-\chi\rho\delta_{ik}.\end{aligned}\right\}.\qquad(35)$$

Енді Ньютондық жуықтаудағы интервал квадратының өрнегін еске түсірейік. (27) сәйкес осы өрнекте

$$g_{00}=c^2-2U.\qquad(36)$$

Метрикалық тензордың қалған құрамдастары осы жуықтауда олардың Галилей мәндерімен ауыстырылады. Формуланы қолдану

$$g_{00}g^{00}+g_{0i}g^{i0}=1\qquad(37)$$

және $g_{0i}g^{i0}$ туындылардың бірлікпен салыстырғанда өте аз екендігін пайдалана отырып, біз бұл туралы болжауға болады

$$g_{00}g^{00}=1,\qquad(38)$$

Осыдан

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4}. \tag{39}$$

Бірақ U ньютондық потенциал мына теңдеуді қанағаттандыратындықтан

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho. \tag{40}$$

және

$$\Delta g^{00} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2}\rho. \tag{41}$$

Бұл теңдеуді бірінші (35) теңдеуімен салыстыра отырып, Эйнштейннің ауырлық тұрақтысы χ және Ньютон тұрақтысы χ қатысты байланыстан мынадай сәйкестікті көрсете аламыз

$$\chi = \frac{8\pi\gamma}{c^2}. \tag{42}$$

U – Ньютон потенциалы (40) теңдеудің шешімі болып табылады, ол шексіздікте сәйкес шектік шарттарды қанағаттандырады және (28) түрінде болады. Ньютондық потенциалмен қатар функцияларды да енгізейік

$$U_i = \gamma \int \frac{(\rho v_i)'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx'dy'dz', \tag{43}$$

Мынадай теңдеулерді және шексіздіктегі шарттарды қанағаттандырады

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma\rho v_i \tag{44}$$

Бұл функцияларды сәйкес электродинамикалық шамаларға ұқсас гравитациялық вектор-потенциал деп те атауға болады. Сонда (35) теңдеулердің шешімдері олардағы χ тұрақтысының мәнін оның (42) –дегі мәнімен ауыстырғаннан кейін былай жазылады:

$$\left.\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right), \\ g^{0i} &= \frac{4}{c^4}U_i, \\ g^{ik} &= -\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

U - потенциалдың өлшемі жылдамдықтың квадратының өлшеміне, ал U_i – жылдамдықтың үшінші дәрежесінің өлшеміне сәйкес екенін байқауға болады.

Шамалардың өлшемі ретін бағалағанда, U - шамасы q^2-қа, ал, U_i - болса q^3 дәрежелі болады деп болжауға болады. Мұндағы q жарық жылдамдығымен салыстырғанда аз шама деп қарастырамыз.

Метрикалық тензордың контрвarианттық құрамдастарынан біз нақты алгебралық жолмен ковариантты құраушыларды таба аламыз, сонымен қатар басқа шамаларды да анықтай аламыз. Шынында да, бұл алгебрадан белгілі

$$g^{\alpha\sigma} = \frac{g \text{ анықтауышының } g_{\alpha\sigma} \text{ элементінің алгебралық қосымшасы}}{g}, \qquad (46)$$

$$g_{\alpha\sigma} \text{ элементінің алгебралық қосымшасы} =$$

$$= (-1)^{\alpha+\sigma}\, g \text{ анықтауышының } g_{\alpha\beta} \text{ элементінің миноры} \qquad (47)$$

Дегенмен, g_{0i} ковarианттық шамаларын анықтау үшін біз мына қатынастарды қолданамыз

$$g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu . \qquad (48)$$

Егер $\mu = 0$ және $\nu = i$ болса

$$g_{0\sigma} g^{\sigma i} = \delta_0^i = 0. \qquad (49)$$

Мынадай теңдікті жазуға болады

$$g_{00} g^{oi} + g_{ok} g^{ki} = 0 \qquad (50)$$

немесе

$$c^2 g^{0i} = g_{0i} = \frac{4U_i}{c^2}. \qquad (51)$$

Одан ары қарай

$$g_{ik} = -\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\delta_{ik} . \qquad (52)$$

Осылайша, Фок бойынша бірінші жуықтау метрикасының ([1], 271 б.) нұсқасы осылай болады.

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2\right) +$$

$$+ \frac{8}{c^2}\left(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3\right)dt \ . \qquad (53)$$

Бұл нәтижелерге қатысты келесі мәселелерді көтеруге болады:

1. Мұндағы g_{00} метрикалық тензордың құраушыларында релятивистік қосымша жоқ, ал g_{ik} және g_{0i} мұндай қосымшалар бар. Бұл Фоктың мынадай екі мәселені бірыңғай шешуінен пайда болады. Фок χ тұрақтысы мен бірінші жуықтау метрикасын бірденнен анықтады. Шын мәнінде, бұл есептерді бөліп қарастыру керек: бірінші Эйнштейн теңдеулерін нөлдік жуықтауда шешу керек және бұл шешімдерді Ньютон интервалымен салыстыру арқылы біз χ тұрақтыны табуымыз керек, содан кейін ғана бірінші жуықтауды жасақтауымыз, яғни, $g_{\mu\nu}$ метрикалық тензордың барлық құраушыларына релятивистік түзетулерді іздеуіміз қажет.

2. Егер сынақ денесінің орталық-симметриялы гравитациялық өрістегі қозғалысы туралы есептерге (53) теңдеуін қолдансақ, онда перигелийдің ығысуына арналған тиімді өрнегін ала алмаймыз.

3. $Udt^2 \sim dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2$ шоғырланған жүйесі үшін, яғни релятивистік g_{00} түзетудің g_{ik} түзетуімен реттіліктері бірдей болуы керек. Осы пікірлерді ескере отырып, біз g_{00} түзетуді анықтаймыз. Ол біз үшін мынадай теңдеу құруымыз керек

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4} + \frac{\Phi}{c^6}, \tag{54}$$

Мұндағы Ф – белгісіз функция. Содан кейін, қажетті метрика квазистационарлық деген болжамды жасай отырып

$$R^{00} = \frac{1}{2}\Delta g^{00} - \frac{2U}{c^6}\Delta U - \frac{2}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2. \tag{55}$$

Эйнштейн теңдеуі сәйкесінше

$$R^{00} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2}\left(T^{00} - \frac{1}{2}g^{00}T\right), \tag{56}$$

мұндағы

$$c^2T^{00} = \rho\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2} + \Pi - U\right)\right],$$

$$c^2T^{oi} = \rho v_i,$$

$$c^2T^{ik} = \rho v_i v_k - P_{ik}. \tag{57}$$

Бізді қажетті жуықтауда

$$T=\rho-\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{v^2}{2}+3U-\Pi\right)+\frac{P_{kk}}{c^2}, \tag{58}$$

$$T^{00}-\frac{1}{2}g^{00}T=\frac{1}{2c^2}\left[\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U\right)-\frac{P_{kk}}{c^2}\right]. \tag{59}$$

Енді (56) былай жазылады

$$\frac{1}{2}\Delta g^{00}-\frac{2U}{c^6}\Delta U-\frac{2}{c^6}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2=-\frac{4\pi\gamma}{c^4}\left[\rho+\frac{\rho}{c^2}\left(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U\right)-\frac{P_{kk}}{c^2}\right]. \tag{60}$$

Осыдан (54) ескере отырып, белгісіз Φ функциясы үшін теңдеуді аламыз

$$\Delta\left(\Phi-2U^2\right)=-8\pi\gamma\left[\rho\left(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U\right)-P_{kk}\right], \tag{61}$$

шешімі

$$\Phi=2U^2+2\gamma\int\frac{\rho'\left(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U\right)'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}(dx')^3-2\gamma\int\frac{P'_{kk}(dx')^3}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}. \tag{62}$$

g^{00} – метрикалық тензордың сәйкес ковarианттық компоненті

$$g_{00}=c^2-2U+\frac{4U^2-\Phi}{c^2}=c^2-2U+\frac{2U^2}{c^2}-\frac{2\gamma}{c^2}\int\frac{\rho'(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U)'-P'_{kk}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}(dx')^3$$

(63)

Сонымен, бірінші Фок жуықтауының нақтыланған метрикасы өзінің соңғы түрін нұсқасы [4]

$$ds^2=\left(c^2-2U+\frac{2U^2}{c^2}-\frac{2\gamma}{c^2}\int\frac{\rho'(\frac{3}{2}v^2+\Pi-U)'-P'_{kk}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}(dx')^3\right)dt^2-$$

$$-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1{}^2+dx_2{}^2+dx_3{}^2\right)+\frac{8}{c^2}\left(U_1dx_1+U_2dx_2+U_3dx_3\right)dt \tag{64}$$

Бұл метрикадан көрініп тұрғандай, Эйнштейннің гравитация теориясындағы бірінші жуықтау $\left(\sim\frac{1}{c^2}\right)$ өрістің сызықты еместігін, үш өлшемді кеңістіктің қисаюын, ішкі құрылым және айналумен байланысты векторлық гравитациялық өрісті ескеру қажеттігіне саяды. Ал Ньютонның интервалы на келсек, ол гравитациялық өрістің сызықтылығы, үшөлшемді кеңістіктің евклидтігі және айналумен байланысты күш өрісінің жоқтығы туралы болжамдарға негізделген.

$$ds^2 = \left(c^2 - 2U\right)dt^2 - dx_1{}^2 - dx_2{}^2 - dx_3{}^2 \qquad (65)$$

Қолданылған әдебиет

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961.564 с.
2. Фок В.А. Квантовая физика и философские проблемы // Физическая наука и философия. М.: Наука, 1973. С. 55-77.
3. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Ч. 1. Теория систем отношений. М.: Изд-во МГУ, 1996. 264 с.
4. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Ч. 2. Теория физических взаимодействий. М.: Изд-во МГУ, 1998. 448 с.